数理解析研究所講究録
第 1845 巻 2013 年 145-152

Differential-like structures associated with strong local Dirichlet forms*1

京都大学・大学院情報学研究科　日野 正訓 (Masanori Hino)
Graduate School of Informatics,
Kyoto University

1 序

本稿は準備中の論文 [Hi] の予報である．微分構造を持つ空間については，その上で微分可能な関数が定義され，微分演算を伴う解析（端的には微分方程式の理論）が展開される．本稿では，一般の測度つき距離空間についても，その上に正則強局所 Dirichlet 形式が定まっているならば，Dirichlet 形式の定義域に属する関数に対して「微分」の概念を定義することができ，空間に木上 [Ki08] が提唱した「測度論的 Riemann 構造」が定まることを述べる．このようなことを考える１つの動機および遠い目標は，フラクタル集合などの微分構造を持たない空間においても確率微分方程式のような理論を作りたいというものである．

2 設定

主定理の主張を述べるため，まず，[FOT] に従って Dirichlet 形式の一般論から必要事項をまとめておく．

(K,d) を局所コンパクト可分距離空間とし，μ を K 上の正値 Radon 測度で $\operatorname{supp}\mu=K$ なるものとする．K 上の可測関数 f に対して $\operatorname{supp}(|f|\,d\mu)$ を $\operatorname{supp} f$ で表す．K 上の実数値連続関数全体を $C(K)$ で表し，$C(K)$ の元で台が有界なもの全体を $C_c(K)$ とする．

定義 2.1 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $L^2(K,\mu)$ 上の正則強局所 Dirichlet 形式であるとは，以下が成り立つことをいう．

(i) $\mathcal{F}$ は $L^2(K,\mu)$ の稠密な部分空間で，$\mathcal{E}\colon\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ は非負定値対称双線型形式．

(ii) $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は $L^2(K,\mu)$ 上で closed，すなわち $f,g\in\mathcal{F}$ に対して

$$(f,g)_{\mathcal{F}}:=\mathcal{E}(f,g)+\int_K fg\,d\mu$$

により $\mathcal{F}$ の内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}}$ を定めると，$\mathcal{F}$ は Hilbert 空間になる．

---

*1 本研究は科研費（課題番号: 21740094) の助成を受けたものである．

(iii) (Markov 性) $f \in \mathcal{F}$ に対して $\hat{f} = (0 \vee f) \wedge 1$ と定めると $\hat{f} \in \mathcal{F}$ で，さらに $\mathcal{E}(\hat{f},\hat{f}) \le \mathcal{E}(f,f)$ が成り立つ．

(iv) (正則性) $\mathcal{F} \cap C_c(K)$ は $\mathcal{F}$ で稠密かつ $C_c(K)$ で稠密．ただしここで $\mathcal{F}$ の位相は内積 $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}}$ から定まるもの，$C_c(K)$ の位相は一様位相とする．

(v) (強局所性) $f, g \in \mathcal{F}$ で $\operatorname{supp} f$, $\operatorname{supp} g$ はともにコンパクト，かつ $\operatorname{supp} f$ のある近傍で g が定数ならば，$\mathcal{E}(f,g) = 0$.

注意 2.2 このとき，Dirichlet 形式の一般論から，K 上の，内部消滅のない μ-対称拡散過程 $\{X_t\}$ が対応する．

以下では，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は常に正則強局所 Dirichlet 形式であるとする．$\mathcal{F}$ の元で有界関数であるもの全体を $\mathcal{F}_b$ で表わす．$f \in \mathcal{F}_b$ に対して，f のエネルギー測度 ν_f [*2]が，次の性質をみたす唯一つの K 上の正の有限 Radon 測度として定義される:

$$\int_K \varphi\, d\nu_f = 2\mathcal{E}(f, f\varphi) - \mathcal{E}(f^2, \varphi), \qquad {}^\forall \varphi \in \mathcal{F}_b \cap C(K).$$

エネルギー測度は，K の任意の Borel 集合 A に対して

$$\left|\nu_{f_1}(A)^{1/2} - \nu_{f_2}(A)^{1/2}\right| \le \nu_{f_1 - f_2}(A)^{1/2} \le (2\mathcal{E}(f_1 - f_2, f_1 - f_2))^{1/2}$$

という不等式をみたすため，有界でない $\mathcal{F}$ の元に対しても，有界関数列で近似することで自然に ν_f を定めることができる．また，$f, g \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\nu_{f,g} := \frac{1}{2}(\nu_{f+g} - \nu_f - \nu_g)$$

として K 上の符号付き測度 $\nu_{f,g}$ を定める．$\nu_{f,g}$ は f, g に関して双線型性を持つ．

次に，エネルギー測度を用いて Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の各点指数および指数の概念を [Hi10] に倣って導入する．

定義 2.3 K 上の正の Radon 測度 ν が $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の minimal energy-dominant measure（エネルギー支配極小測度）であるとは，次の 2 条件が成り立つことをいう．

(i) 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対して，$\nu_f \ll \nu$（すなわち ν_f は ν に対して絶対連続).

(ii) もし別の測度 ν' が上の条件を（ν を ν' に置き換えて）満たしていれば，$\nu \ll \nu'$ である．

[*2] [FOT] では $\mu_{\langle f \rangle}$ という記号が用いられており，そちらの方が標準的な記法である．

このとき $\nu_{f,g} \ll \nu$ $(f, g \in \mathcal{F})$ も常に成り立つ．また，もし ν と $\hat{\nu}$ がともにエネルギー支配極小測度であれば，定義より ν と $\hat{\nu}$ は互いに絶対連続である．エネルギー支配極小測度は常に存在する．更に強く，次の主張が成り立つ．

命題 2.4 ([Hi10, Proposition 2.7]) 集合 $\{f \in \mathcal{F} \mid \nu_f$ はエネルギー支配極小測度 $\}$ は $\mathcal{F}$ で稠密である．

$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ のエネルギー支配極小測度 ν を一つ固定する．

定義 2.5 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の各点指数とは，次の条件を満たす K 上の $\mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$-値関数 $p(x)$ のうち（ν-a.e. の意味で）最小の関数のことである：任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ に対して，

$$\operatorname{rank}\left(\frac{d\nu_{f_i,f_j}}{d\nu}(x)\right)_{i,j=1}^{n} \leq p(x) \quad \nu\text{-a.e. } x \in K.$$

また，$p := \nu\text{-}\operatorname{esssup}_{x\in K} p(x) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の指数と呼ぶ．

容易にわかるように，$p(x)$ および p は ν の選び方に依存しない．$p(x)$ は ν-a.e. の意味で一意に定まり，後述するように「点 $x \in K$ における仮想的な“接空間”の次元」を表わしている．また，指数 p は，拡散過程 $\{X_t\}$ の加法汎関数に関するマルチンゲール次元に等しいという確率論的な意味を持つ（[Hi10, Theorem 3.4]）．

例 2.6 $K = \mathbb{R}^d$, $\mu = dx$, $\mathcal{F} = W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ とし，$A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{d}$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ を，可測な $\mathbb{R}^{d\times d}$-値関数で各 x について $A(x)$ は対称行列であり，更にある $c_1 > 0$，$c_2 > 0$ に対して

$$c_1|h|_{\mathbb{R}^d}^2 \leq (A(x)h, h)_{\mathbb{R}^d} \leq c_2|h|_{\mathbb{R}^d}^2, \quad h \in \mathbb{R}^d,\ x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立っているものとする．

$$\mathcal{E}(f, g) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (A(x)\nabla f(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^d}\, dx, \quad f, g \in \mathcal{F} \tag{2.1}$$

と定めると，$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ 上の正則強局所 Dirichlet 形式となる．$f, g \in \mathcal{F}$ に対し

$$\nu_{f,g}(dx) = (A(x)\nabla f(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^d}\, dx$$

であることが具体的な計算でわかり，エネルギー支配極小測度 ν として Lebesgue 測度 dx をとることができる．すると $\dfrac{d\nu_{f_i,f_j}}{d\nu}(x) = (A(x)\nabla f(x), \nabla g(x))_{\mathbb{R}^d}$ となり，このことから容易に $p(x) = d$ ν-a.e. が従う．特に指数 p は空間の次元 d に等しい．

例 2.7 $K=\mathbb{R}^2$, $\mu=dx\,dy$（2 次元 Lebesgue 測度）とし，$f,g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して

$$\mathcal{E}(f,g)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla f(x,y),\nabla g(x,y))_{\mathbb{R}^2}\,dx\,dy+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)\frac{\partial g}{\partial x}(x,0)\,dx$$

と定めると，$(\mathcal{E},C_c^\infty)$ は $L^2(K,\mu)$ 上で可閉となる．そこでその最小閉拡大を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ とすると，エネルギー測度は

$$\nu_{f,g}=(\nabla f(x,y),\nabla g(x,y))_{\mathbb{R}^2}\,dx\,dy+\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x}(x,0)\frac{\partial\tilde{g}}{\partial x}(x,0)\,dx\otimes\delta_0(dy),\qquad f,g\in\mathcal{F}$$

と表される．（ここで $\tilde{f}$ は f の準連続修正を表し，δ_0 は 0 における Dirac 測度である．）これより，ν として $dx\otimes(dy+\delta_0(dy))$ をとることができ，具体的な計算から

$$p(x,y)=\begin{cases}2 & (y\neq 0\text{ のとき})\\ 1 & (y=0\text{ のとき})\end{cases}\quad \nu\text{-a.e.},\qquad p=2$$

となる．

例 2.6, 例 2.7 では，Dirichlet 形式の表示式から全ての情報が具体的に計算でき状況は単純であるが，K がフラクタル集合のような場合，Dirichlet 形式の定義は (2.1) のように簡明ではなく，具体的にエネルギー測度を記述したり，(各点)指数を決定することは易しい問題ではない．また，一般に ν は μ と互いに特異な測度になり得る．

3 主定理

(K,μ), $(\mathcal{E},\mathcal{F})$, ν は前節と同じ条件をみたすものとする．簡単のため，以下では指数 p は有限値と仮定する．

定理 3.1 $\mathcal{F}^p:=\underbrace{\mathcal{F}\times\cdots\times\mathcal{F}}_{p\text{ 個}}$ の稠密な部分集合 $\mathcal{G}$ が存在し，$\mathcal{G}$ の任意の元 $(g_1,\ldots,g_p)$ に対して以下が成立する．

(i) 各 $i=1,\ldots,p$ に対して，ν_{g_i} はエネルギー支配極小測度．
(ii) ν-a.e. x に対して，$\left(\frac{d\nu_{g_i,g_j}}{d\nu}(x)\right)_{i,j=1}^{p(x)}$ は正則行列．

$p=1$ のときは定理 3.1 は命題 2.4 と同等な主張である．その意味で，定理 3.1 は命題 2.4 の拡張といえる．

$\boldsymbol{g}=(g_1,\ldots,g_p)\in\mathcal{G}$ を 1 つ固定し，$Z_{\boldsymbol{g}}(x):=\left(\frac{d\nu_{g_i,g_j}}{d\nu}(x)\right)_{i,j=1}^{p}$ とおく．次の定理より，$\boldsymbol{g}\colon K\to\mathbb{R}^p$ は K の「局所座標系」($\boldsymbol{g}$ の単射性は一般に成り立たない)，$Z_{\boldsymbol{g}}(x)$ は $x\in K$ の「接空間」における Riemann 計量，$p(x)$ は接空間の次元とみなすことができる．

定理 3.2 ($\mathcal{F}$ に属する関数の "全微分") 任意の $f \in \mathcal{F}$ に対し，K 上の ν-可測 $\mathbb{R}^p$ 値関数 $\nabla_g f = {}^t(\partial^{(1)} f, \ldots, \partial^{(p)} f)$ が ν-a.e. の意味で一意的に存在して以下をみたす: ν-a.e. x に対して，$\partial^{(j)} f(x) = 0$ $(j > p(x))$ であり，

$$\tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{p(x)} \partial^{(i)} f(x) \big(\tilde{g}_i(y) - \tilde{g}_i(x)\big) + R_x(y), \quad y \in K \tag{3.1}$$

と表したとき $\dfrac{d\nu_{R_x}}{d\nu}(x) = 0$.

また，等式

$$\mathcal{E}(f,h) = \frac{1}{2} \int_K \big(\nabla_g f, Z_g \nabla_g h\big)_{\mathbb{R}^p} \, d\nu, \quad f, h \in \mathcal{F} \tag{3.2}$$

が成立する.

上の定理の主張において，$\tilde{f}$ は f の準連続修正を表す．また，$\dfrac{d\nu_{R_x}}{d\nu}(x)$ の正確な意味は，x を定数とみて $R_x(y)$ を (3.1) によって y の関数として定義したとき，自然に定まる $\dfrac{d\nu_{R_x}}{d\nu}(y)$ の ν-version に $y = x$ を代入したもの，すなわち

$$\frac{d\mu_{\langle R_x \rangle}}{d\nu}(x) = \frac{d\mu_{\langle f \rangle}}{d\nu}(x) - 2 \sum_{i=1}^{p(x)} \partial^{(i)} f(x) \, \frac{d\mu_{\langle f, g_i \rangle}}{d\nu}(x) + \sum_{i,j=1}^{p(x)} \partial^{(i)} f(x) \, \partial^{(j)} f(x) \, \frac{d\mu_{\langle g_i, g_j \rangle}}{d\nu}(x)$$

である.

注意 3.3 ある有限分岐的フラクタルのクラスに関しては，定理 3.2 に関連した既知の結果として以下のようなものがある.

(1) (3.2) と類似の表現（ただし「Riemann 計量」は退化している）— [Kus89, Kus93, Ki93, Te00].
(2) $p = 1$ の場合の (3.1) に類似した表現 — [PT08, Hi10].

定理 3.1 および定理 3.2 はこれらの結果の精密化・拡張と見なすことができる.

例 3.4 K として，次のいずれかの自己相似フラクタルを考える.

(1) ネステッド・フラクタル（図 1 を参照.）
(2) Sierpinski carpet（図 2 を参照.）

μ を K 上の Hausdorff 測度とするとき，K 上の「Brown 運動」に対応する $L^2(K, \mu)$ 上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が定まる．([Li90, BB89, KZ92, BB99, BBKT10] を参照.) このときエネルギー支配極小測度 ν は μ と互いに特異で（[Hi05, BBK06]），(1) の場合，各点

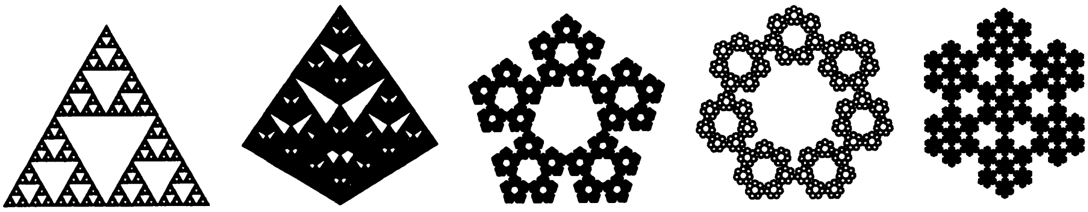

図1　ネステッド・フラクタルの例

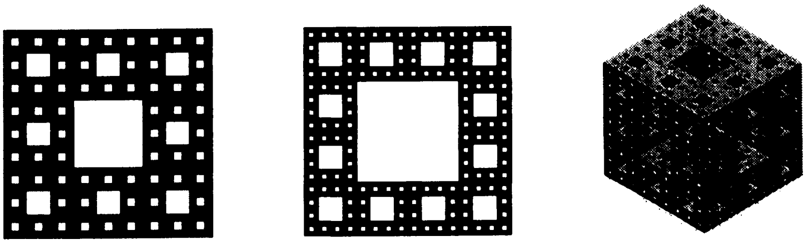

図2　Sierpinski carpet の例

指数 $p(x)$ は ν-a.e. で 1 に等しく（[Kus89, Hi08]），(2) の場合，指数 $p\,(\geq 1)$ はスペクトル次元 d_s 以下である（[Hi11]）．特に図 2 の最初の 2 つのフラクタルについては $d_s < 2$ であり，このことから $p = 1$ が従う．図 2 の一番右の 3 次元標準 Sierpinski carpet については，$2 < d_s < 3$ であることが知られており（[BB99]），p は 1 または 2 であるが，どちらが正しいかはまだ決定されていない．(1) と (2) のいずれの例においても，Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{F}$ は Besov 空間 $\Lambda^{d_w/2}_{2,\infty}(K,\mu)$ $(d_w > 2)$ で特徴付けられ（[Jo96, Kum00, Gr03]），$\mathbb{R}^d$ 上の 1 次関数を K に制限したもので $\mathcal{F}$ に属するのは定数関数のみである．このように，関数空間 $\mathcal{F}$ に属する元は一般に通常の意味で滑らかとは言えず．$\mathbb{R}^d$ の標準座標関数との比較は困難だが，$\mathcal{F}$ の元どうしなら infinitesimal な変動の商を考えることができるというのが定理 3.2 の背後にある事実である．

以上の定理により，集合 K に Riemann 構造の類似が導入されたことになるが，更に話を進めるためにはまだ以下のような障害がある．

(i) 各点指数 $p(x)$ や「Riemann 計量」Z_g は ν-a.e. でしか定義されておらず，定義されていない点の集合は K で稠密であったり容量が正でありえるため，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対応する拡散過程 $\{X_t\}$ の解析のためにはまだ情報が不足している．

(ii) 定理 3.1 における $\mathcal{G}$ の元を（1つでも）具体的に記述する方法が一般にはわからない．（ただし，K が非退化な Sierpinski gasket で $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が Brown 運動に対応するものという具体例では，定数関数でない任意の調和関数は $\mathcal{G}$ に属することが示されている

([Hi10, Theorem 5.6])).

これらは今後の課題である.

参考文献

[BB89] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpiński carpet, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **25** (1989), 225–257.

[BB99] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, Canad. J. Math. **51** (1999), 673–744.

[BBK06] M. T. Barlow, R. F. Bass, and T. Kumagai, Stability of parabolic Harnack inequalities on metric measure spaces, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 485–519.

[BBKT10] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai, and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), 655–701.

[FOT] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, 2nd ed., de Gruyter Studies in Mathematics **19**, Walter de Gruyter, 2010.

[Gr03] A. Grigor'yan, Heat kernels and function theory on metric measure spaces, in *Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002)*, 143–172, Contemp. Math. **338**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

[Hi05] M. Hino, On singularity of energy measures on self-similar sets, Probab. Theory Related Fields **132** (2005), 265–290.

[Hi08] M. Hino, Martingale dimensions for fractals, Ann. Probab. **36** (2008), 971–991.

[Hi10] M. Hino, Energy measures and indices of Dirichlet forms, with applications to derivatives on some fractals, Proc. London Math. Soc. **100** (2010), 269–302.

[Hi11] M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, preprint.

[Hi] M. Hino, Measurable Riemannian structures associated with strong local

Dirichlet forms, in preparation.

[Jo96] A. Jonsson, Brownian motion on fractals and function spaces, Math. Z. **222** (1996), 496–504.

[Ki93] J. Kigami, Harmonic metric and Dirichlet form on the Sierpiński gasket, in *Asymptotic problems in probability theory: stochastic models and diffusions on fractals (Sanda/Kyoto, 1990)*, 201–218, Pitman Res. Notes Math. Ser. **283**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[Ki08] J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, Math. Ann. **340** (2008), 781–804.

[Kum00] T. Kumagai, Brownian motion penetrating fractals —An application of the trace theorem of Besov spaces—, J. Func. Anal., **170** (2000), 69–92.

[Kus89] S. Kusuoka, Dirichlet forms on fractals and products of random matrices, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **25** (1989), 659–680.

[Kus93] S. Kusuoka, Lecture on diffusion processes on nested fractals, in *Statistical mechanics and fractals*, 39–98, Lecture Notes in Math. **1567**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[KZ92] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, Probab. Theory Related Fields **93** (1992), 169–196.

[Li90] T. Lindstrøm, Brownian motion on nested fractals, Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1990), no. 420.

[PT08] A. Pelander and A. Teplyaev, Products of random matrices and derivatives on p.c.f. fractals, J. Funct. Anal. **254** (2008) 1188–1216.

[Te00] A. Teplyaev, Gradients on fractals, J. Funct. Anal. **174** (2000) 128–154.